

**МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ АДМИНИСТРАЦИИ ГОРОДА
ЕКАТЕРИНБУРГА**

МАОУ СОШ № 79

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

учебного предмета «Математический театр»

для обучающихся 5-9 классов

Екатеринбург, 2025

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая программа учебного курса «Математический театр» для 5-9 классов направлена на выращивание математических способностей и одаренности детей, их общеинтеллектуальное и личностное развитие, повышение качества подготовки к математическим олимпиадам и качества математического образования в целом.

Целью курса «Математический театр» является системная подготовка учащихся 5-9 классов к математическим олимпиадам, ориентированная на вовлечение школьников в математическую деятельность, развитие мотивации, мышления, творческих способностей и за счет этого — достижение более высокого уровня их олимпиадной и общей математической подготовки.

Концептуальная идея данного курса состоит в том, чтобы на основе системно-деятельностного подхода разработать педагогический инструментарий (учебное содержание, технологии, методики, методическое обеспечение) непрерывной олимпиадной подготовки по математике в 5–9 классах, организовать обучение и методическое сопровождение учителей, стремящихся повысить мотивацию и качество математической подготовки своих учеников.

Программа учебного курса «Математический театр» предназначена для учащихся 5-9 классов и рассчитана на 34 часа (1 час в неделю) в 5-8 классах, на 17 часов (0,5 часа в неделю) в 9 классе.

Содержание курса «Математический театр» структурировано в 21 тематическую линию. Эти линии непрерывно развиваются с 5 по 9 класс, достаточно полно представляют традиции олимпиадной подготовки и углубляют знания школьной программы по математике. Выбор содержания осуществляется с опорой на золотой фонд олимпиадной литературы, проверенные временем методы и приемы решения олимпиадных задач. Содержание курса на каждом этапе обучения учитывает возрастные особенности развития детей.

I этап – ознакомительный (5-6 классы)

Основной задачей данного этапа является знакомство учащихся с базовыми подходами, методами и приемами решения олимпиадных задач в соответствии с содержанием курса «Олимпиадная математика», а также формирование первичного опыта применения этих методов.

II этап – практический (7-9 классы)

На данном этапе увеличивается доля самостоятельности учащихся в применении метода рефлексивной самоорганизации при решении олимпиадных задач. Продолжается отработка базовых приемов и методов олимпиадной математики, но основной задачей становится теперь освоение общих подходов к решению нестандартных задач, применение их к решению более сложных, «многоходовых» задач и переход к самостоятельной разработке новых способов.

В результате прохождения учащимися этих этапов открывается возможность не только повысить качество олимпиадной и общей математической подготовки учащихся, но и создать в классе среду уважения к успеху и стремления к успеху, развить их познавательную мотивацию, поддержать психологическое здоровье детей и их личностный рост к наивысшим уровням развития.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП 5-6 КЛАССЫ

Цель этапа: создать для каждого учащегося 5–9 классов общеобразовательной школы возможность качественной олимпиадной подготовки по математике посредством вовлечения в самостоятельную математическую деятельность, развития мышления, мотивации, освоения методов и формирования системного опыта решения олимпиадных математических задач.

Задачи этапа:

1. создать творческую, доброжелательную, безопасную (с позиций права на ошибку) образовательную среду, ориентированную на поддержку успеха каждого ученика относительно себя;
2. вовлечь учащихся на основе системно-деятельностного подхода (система «Учусь учиться») в математическую деятельность, создать возможность самостоятельного открытия ключевых методов и приемов решения математических олимпиадных задач, тренировать умение их применять;
3. снять у детей неуверенность и страх при решении нестандартных задач, создать возможность для каждого ученика системно переживать ситуацию успеха, радость победы, получать удовольствие от интеллектуальной математической деятельности;
4. сформировать у школьников умение решать нестандартные задачи на основе метода рефлексивной самоорганизации;
5. тренировать мыслительные операции, навыки парной и групповой работы, коммуникативные умения в позициях «автора», «понимающего», «критика», «организатора»;
6. создать качественное содержание олимпиадной подготовки по математике, связанное как с содержанием школьного курса математики (за основу взят курс математики «Учусь учиться»), так и с содержанием школьных математических олимпиад разных уровней (вплоть до Всероссийской олимпиады школьников).

Устойчивое мотивационное напряжение учащихся, необходимое для включения в любую коллективную деятельность (в том числе деятельность по решению олимпиадных задач), может проявиться только при условии удовлетворения таких базовых потребностей человека, как потребности в безопасности, причастности (теплых человеческих отношениях) и самоутверждении. Для создания среды, отвечающей этим требованиям, используются приведенные выше методологические и дидактические принципы «Математического театра», а также конкретизирующие их правила.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО КУРСА

I. АРИФМЕТИКА

1. Суммы

Приемы упрощения устного счета (сложение, вычитание): разбиение на пары. Метод дополнения до целого в клетчатых задачах. Использование связи между числовыми и геометрическими задачами для упрощения счета.

Приемы решения задач о разделении чисел на группы с равной суммой. Составление магических квадратов. Изменение суммы при изменении каждого слагаемого на некоторое число. Метод подсчета двумя способами на примере чисел с известными попарными суммами.

Прием разбиения на пары для подсчета сумм чисел, идущих через равные промежутки. Определение четности количества чисел в ряду. Формула суммы чисел от 1 до n . Разбиение на пары групп чисел с равной суммой. Метод подсчета двумя способами в арифметических задачах.

Использование подсчета двумя способами в доказательствах «от противного», при решении задач с арифметическими таблицами, геометрических задач. Введение переменной для дальнейшего двойного подсчета.

Среднее арифметическое, его свойства (изменение при увеличении всех чисел набора на некоторое число и в некоторое число раз; оценка среднего арифметического сверху и снизу наибольшим и наименьшим числами набора; неизменность среднего арифметического при добавлении числа, равного среднему арифметическому чисел набора).

2. Числа и их свойства

Способы решения числовых и буквенных ребусов. Организация перебора с учетом принципа узких мест. Приемы решения задач на восстановление знаков действий, расстановку скобок, нахождение чисел с указанными свойствами.

Понятие решения буквенного ребуса. Метод перебора для поиска всех решений ребуса. Ограничение полного перебора с учетом принципа узких мест, свойств четности. Доказательство отсутствия решения у ребуса с помощью метода перебора, числовых оценок.

Конструкции с обыкновенными и десятичными дробями. Представление чисел в виде обыкновенных дробей с числителем 1 и разными знаменателями. Применение арифметических свойств дробей, правила сокращения дробей. Уменьшение чисел на интервале $(0; 1)$ при возведении в степень. Приемы решения задач на равномерное распределение частей между несколькими людьми.

Использование отрицательных чисел в конструкциях как метод устранения мнимых противоречий. Зависимость знака произведения от знаков множителей. Приемы решения задач на оценку и пример, связанные с отрицательными числами. Использование отрицательных чисел в задачах с числовыми оценками.

3. Закономерности

Поиск циклов в арифметических задачах. Анализ задач с повторяющимися числами, вычисление длины цикла. Определение и использование порядкового номера внутри цикла в задачах с «большими» числами.

Эффект «плюс-минус один». Использование схемы для его преодоления. Вывод формулы для определения количества натуральных чисел в промежутке с помощью интерпретации на числовой оси. Метода масштабирования для проверки формул.

Использование эффекта «плюсминус один» для устранения противоречий при решении задач. Конструкции с предварительным анализом.

Конструирование путем разбиения на аналогичные подзадачи в задачах на разрезание, составление числовых конструкций.

Последовательное конструирование (конструирование путем рассмотрения более простых задач и дальнейшего обобщения на исходную задачу). Бесконечные процессы. Понятие базовой конструкции, шага. Прием разбиения процесса на последовательность этапов, на каждом из которых изменяются свойства только одного элемента.

4. Время и движение

Приемы решения арифметических задач о промежутках времени. Учет разницы часовых поясов. Идея о задачах на движение по реке на примере задач про отстающие и спешащие часы. Конструкции в задачах про время.

Задачи на относительное движение (движение навстречу, в противоположных направлениях, вдогонку, с отставанием) с неполными данными. Разбор случаев в задачах на движение.

Использование нестандартных чертежей при решении задач на движение. Изображение скоростей движения в частях (единичных отрезках). Масштабирование скорости. Использование более крупных единиц времени для уравнивания расстояний.

Недельная и годовая цикличность. День недели как остаток от деления на 7. Способы построения конструкций и доказательства невозможности построения конструкций в задачах про календарь.

Движение по кругу. Изображение скоростей движения в условных единицах (дугах). Движение стрелок часов, исследование количества их пересечений. Понятие градусной меры дуги на примере углов между часовой, минутной, секундной стрелками.

II. ГЕОМЕТРИЯ

1. Геометрическое мышление

Повороты клетчатой фигуры на прямой угол, связь с симметрией. Понятие о зеркальных (но несимметричных) фигурах. Использование симметрии и поворотов фигур при решении задач на разрезание. Метод «пропеллера» для построения примеров.

Задачи на разрезание пространственных фигур. Вычисление объемов фигур, составленных из кубиков. Изменение объема фигуры, составленной из кубиков, при увеличении каждого измерения в 2 раза. Составление фигур из объемных частей.

Понятие развертки. Нахождение различных разверток куба. Способы изображения «склеивающихся» граней при изображении развертки куба.

Изображение фигур, состоящих из кубиков. Три вида объемной фигуры. Восстановление объемной фигуры по трем ее видам. Изображение многогранников по заданному количеству вершин, ребер и граней (тетраэдр, пирамида, октаэдр, усеченная пирамида). Развертки многогранников. Оклеивание объемных фигур. Пути на поверхности объемных фигур.

2. Площади

Разрезание фигур на равные части по линиям сетки и составление фигур из частей. Приемы поиска разных способов разрезания. Метод перебора, использование симметрии при поиске как можно большего количества различных разрезов одной и той же фигуры на равные части. Фигуры тетрамино, их нахождение с помощью метода перебора. Использование множества делителей числа для вычисления возможного количества частей, на которые можно разрезать фигуру.

Разрезания по линиям сетки и диагоналям клеток. Свойство аддитивности площади. Метод разбиения на элементарные части (прямоугольники, прямоугольные треугольники) и метод дополнения для вычисления площадей фигур, границы которых идут не по линиям сетки.

Использование площадей фигур для определения форм частей в случае разрезания клетчатых фигур не по линиям сетки (диагоналям клеток). Пентамино. Получение фигур пентамино из тетрамино с помощью геометрического метода перебора. Использование симметрии при решении задач на разрезание.

Введение дополнительной сетки (укрупнение или уменьшение клеток, наклонная сетка). Первичные представления о движениях плоскости (параллельный перенос, поворот). Перпендикулярность на клетчатой бумаге. Приемы решения задач на перекраивание фигур («разрежь и составь»). Равносоставленные фигуры.

Разрезание не клетчатых фигур. Введение вспомогательной сетки. Разрезание фигур на подобные. Использование вспомогательной раскраски при решении задач на разрезание. Задачи на разрезание с оценкой и примером.

3. Геометрические неравенства

Конструкции с отрезками и ломаными. Вычисление периметров фигур. Связь между длинами отрезков на прямой. Приближенное вычисление длин ломаных и кривых с помощью нити. Подсчет количества кратчайших путей в графе. Задача о нахождении диагонали кирпича. Кратчайшие пути по граням куба, параллелепипеда.

Варианты расположения точек на прямой. Координата середины отрезка числовой прямой. Расстояние между серединами отрезков.

Неравенство треугольника. Доказательство неравенства треугольника с использованием построений. Оценка суммы длин диагоналей четырехугольника через его периметр.

III. АЛГЕБРА

1. От чисел к буквам

Метод уравнивания при решении задач с опорой на вспомогательные схемы. Метод «анализ с конца». Прием «учти лишнее». Метод подсчета двумя способами. Связь с теорией множеств.

Выбор удобной переменной в текстовых задачах. Сравнение метода введения переменных с методом доказательства единственности решения задачи с помощью числовых оценок. Десятичная запись (представление натурального числа в виде $a + 10b + 100c + \dots$). Признаки делимости, связанные с десятичной записью числа. Использование десятичной записи при решении буквенных ребусов и для доказательств «от противного». Сведение задачи к простейшим уравнениям в цифрах с дальнейшим перебором вариантов, использованием свойств делимости.

2. Функциональные зависимости

Использование формул при решении нестандартных текстовых задач. Формулы площади прямоугольника, объема и площади поверхности куба, прямоугольного параллелепипеда.

Доказательство формул перевода единиц измерения площади, объема. Нестандартные единицы измерения.

Понятие взаимно однозначного соответствия между множествами. Разбиение объектов на пары как пример взаимно однозначного соответствия. Использование взаимно однозначного соответствия для сравнения мощностей множеств. Примеры соответствий, не

являющихся взаимно однозначными. Взаимно однозначное соответствие в простых комбинаторных задачах.

Прямая и обратная пропорциональность. Использование пропорций при решении нестандартных текстовых задач, но изменяемых чисел.

3. Неравенства и оценки

Сравнение многозначных чисел. Нахождение наибольшего или наименьшего многозначного числа с определенными свойствами. Использование правил сравнения чисел для доказательства минимальности и максимальности.

Метод перебора в арифметических задачах. Перебор по количеству объектов одного из двух типов. Задачи про «ноги и головы». Оценки, основанные на изменении количества объектов одного типа на единицу.

Четность как инструмент упрощения перебора и доказательства невозможности. Оценки величины «сверху» и «снизу». Ограничение перебора с помощью оценок. Двусторонние оценки как метод доказательства единственности ответа. Простейшие действия с неравенствами. Оценки, связанные с делимостью. Решение двойных неравенств с натуральными числами.

Транзитивность неравенств. Использование промежуточного числа (посредника) для доказательства числовых неравенств. Использование нескольких посредников. Уменьшение чисел на интервале $(0; 1)$ при возведении в степень.

IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Делимость

Вывод признака делимости на 2 с помощью числового луча и зацикливания последней цифры. Изменение последней цифры числа при сложении, вычитании, умножении. Доказательство четности и нечетности суммы и разности двух чисел.

Четность или нечетность суммы нескольких чисел. Доказательство с помощью разбиения на пары. Использование соображений четности при решении задач на доказательство для упрощения перебора вариантов.

Делимость и ее свойства. Доказательство признаков делимости на 2, 4, 8, 5, 25, 10, 3, 9, их обобщение. Отсутствие обобщения признака делимости на 9 на признак делимости на 27.

Разложение натурального числа на простые множители. НОД и НОК. Простые числа. Делимость как инвариант. Другие признаки делимости, связанные с десятичной записью числа (на 7, 11, 13 и др.).

Задачи на оценку и пример, связанные с признаками делимости: на нахождение минимального числа с указанными свойствами делимости, числа с наименьшей суммой цифр.

Каноническое разложение натурального числа. Степень вхождения простого делителя. Четность степеней вхождения простых множителей в каноническое разложение точного квадрата.

2. Остатки

Признак делимости на 10. Последняя цифра как остаток от деления на 10. Правила изменения последней цифры при арифметических операциях (сложение, вычитание, умножение).

Повторяемость на числовом луче чисел, делящихся на n . Повторяемость чисел, дающих определенный остаток при делении на n .

Способ определения остатка числа, связанный с соответствующим признаком делимости. Делимость на n разности числа и его остатка от деления на n . Сумма цифр. Делимость разности числа и его суммы цифр на 3 и 9. Раскладывание числа на разное количество частей с данным остатком.

Остатки от деления целых чисел на натуральные. Общий вид числа с определенным остатком при делении на число. Арифметические свойства остатков. Задачи на остатки с доказательством по принципу Дирихле. За цикливание остатков степеней.

V. ЛОГИКА

1. Математическая логика

Понятие об истинном и ложном высказывании. Составление высказываний и вопросов с определенными свойствами. Перебор двух вариантов в логических задачах.

Рыцари и лжецы. Отрицания элементарных высказываний. Перебор вариантов по роли (рыцарь/лжец). Представление перебора в виде таблицы, дерева вариантов. Высказывания о логическом следовании.

Логические задачи с неединственным ответом. Перебор, использующий высказывания о существовании и всеобщности. Отрицание высказываний о существовании и всеобщности. Отрицание высказываний с «больше», «меньше», «больше или равно», «меньше или равно».

Метод «от противного». Логические таблицы. Отрицание высказываний с «и», «или», более сложных высказываний. Логические задачи на оценку и пример.

Доказательства, использующие чередование объектов. Расположение объектов по кругу.

2. Принципы решения задач

Представление условия задачи в виде нестандартного чертежа. Геометрические интерпретации логических и арифметических задач.

Малые случаи. Разделение задачи на эквивалентные подзадачи. Составление блоков из элементов разбиения. Задачи с повторяющимися объектами. Метод проверки ответа (закономерности) на малых случаях.

Анализ задачи с конца (обратный ход) в арифметических и логических задачах. Сравнение с методом введения переменной. Табличное представление анализа с конца. Рассмотрение последнего шага процесса, его использование для доказательств в логических задачах.

Задачи с вопросом «сколько нужно взять?». Использование отрицаний элементарных высказываний при решении задач.

Формальное введение принципа Дирихле. Связь с доказательством «от противного». Обобщения принципа Дирихле. Принцип Дирихле в геометрических задачах. Остатки и принцип Дирихле.

3. Алгоритмы и конструкции

Переливания (задачи на отмеривание определенного количества жидкости с помощью двух или более емкостей и источника воды). Табличная форма записи шагов алгоритма. Укрупнение шагов алгоритма при наличии повторяющихся групп действий (идея алгоритмических циклов).

Переправы. Организация перебора в задачах на переправы, удобная форма записи решения. Идея промежуточных обратных действий для работы алгоритма (перевоз объекта обратно).

Составление алгоритмов угадывания с помощью вопросов, на которые можно ответить только «да» или «нет». Доказательство несостоятельности алгоритма, позволяющего при одинаковых начальных данных получить различные ответы.

Взвешивания. Составление алгоритмов определения фальшивых монет с помощью взвешиваний. Прямая и косвенная информация. Понятие о количестве информации. Доказательство невозможности построения алгоритма при недостаточном количестве взвешиваний. Задачи на испытания с другими сюжетами.

4. Игры и стратегии

Понятие математической игры для двух игроков на примере игр с шахматными фигурами на досках. Игры-шутки, в которых победитель зависит только от количества раундов. Формирование представления о выигрышных позициях.

Понятие выигрышной стратегии. Математические игры с полной информацией. Использование дерева перебора для доказательства верного выбора стратегии. Симметричная стратегия в играх. Доказательство симметричной стратегии.

Симметричная стратегия с «центром». Примеры неверного использования симметричной стратегии.

Выигрышные позиции как метод конструирования стратегии.

Игры на опережение. Игры, в которых один игрок может гарантировать себе «ничью».

VI. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Комбинаторика

Использование схем (графов) для удобства подсчета количества связей (дорог, рукопожатий). Доказательства невозможности построения графа с определенным количеством связей. Подсчет общего количества игр в однокруговом турнире. Связь между прямым подсчетом числа связей по схеме и двойным подсчетом через суммарное количество выходящих «связей».

Дерево вариантов для решения комбинаторных задач. Переход от дерева вариантов к правилу произведения (правилу «И»). Подсчет количества чисел с определенными свойствами.

Правило суммы (правило «ИЛИ») и правило произведения (правило «И»), определение ситуаций для использования каждого правила. Задачи, требующие использования комбинации этих правил.

Перестановки без повторений и с повторениями на примере анаграмм слова. Вывод формулы для числа перестановок из правила произведения. Факториал и его свойства. Перестановки с повторениями. Вывод формулы.

2. Теория множеств

Диаграмма Эйлера — Венна для двух, трех и более множеств. Пересечение и объединение множеств, различные методы подсчета количества элементов в пересечении и объединении на готовых диаграммах.

Введение вспомогательной диаграммы для решения задачи. Работа с множествами с неизвестным количеством элементов. Логические задачи на множества, связанные с долями и дробями.

Метод дополнения в задачах. Использование кругов Эйлера и метода дополнения в комбинаторных задачах, в том числе для вычисления количества чисел в диапазоне, делящихся или не делящихся на какие-то числа. Метод введения переменной при решении задач про множества.

VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Раскраски и разбиения

Раскраски досок. Конструирование примера раскраски доски с указанными свойствами. Задачи-соревнования на раскраску досок в наибольшее и наименьшее количество цветов. «Правильная» раскраска. Раскраска географической карты как пример «правильной» раскраски.

Чередование объектов как частный случай «шахматной» раскраски. Чередование объектов в ряду, по кругу. Относительное количество чередующихся объектов. Четность суммы чисел в промежутке. Связь чередования и разбиения на пары. Разрезания шахматной доски. Идея использования заданной шахматной раскраски в доказательствах.

Шахматная раскраска досок, ее использование для оценок и доказательств. Обобщение шахматной раскраски на другие объекты. Шахматная раскраска ребер и граней куба. Принцип Дирихле в задачах с раскраской. Использование раскраски для нахождения и доказательства единственности примера.

Виды раскрасок клетчатых досок в два и более цвета. Раскраска полосами, диагональная раскраска в несколько цветов, «крупная» шахматная раскраска. Доказательство невозможности разрезания на основе раскраски.

2. Теория графов

Изображение графов. Граф как способ удобного представления связей между объектами. Изоморфизм графов. Различные способы изображения связей. Неориентированные и ориентированные связи.

Исследование возможности нарисовать фигуру одним росчерком. Теорема Эйлера как формальный способ проверить, можно ли нарисовать фигуру одним росчерком. Нечетность степеней вершин как способ выявления концов пути.

Полный граф. Количество ребер в полном графе. Графы шахматных фигур и количество ребер в них. Двудольный граф как модель связей между объектами двух типов. Представление турнира в виде графа.

Формальное определение графа. Вершины, ребра, степени вершин. Лемма о рукопожатиях как способ подсчета количества ребер в графе через сумму степеней вершин. Свойство четности количества вершин нечетной степени в графе. Лемма о хороводах.

3. Комбинаторная геометрия

Взаимное расположение точек и отрезков на плоскости. Точки и отрезки, лежащие на одной прямой. Идея об увеличении количества частей при разрезании невыпуклых фигур. Разрезание фигур на части с определенным числом сторон.

Разрезание на части, не образующие прямоугольники. Задачи на объединение фигур.

Покрытие плоскости одинаковыми фигурами (паркет). Понятие о многоугольнике. Паркет в форме правильных многоугольников (треугольники, квадраты, шестиугольники). Замощение клетчатыми фигурами. Замощение многоугольниками неправильной формы. Замощение невыпуклыми многоугольниками. Задачи о наиболее плотной укладке.

Невыпуклые фигуры как средство преодоления мнимых противоречий. Задачи о пересечении фигур.

ПРАКТИЧЕСКИЙ ЭТАП 7-9 КЛАССЫ

Содержание этапа: Содержание практического этапа курса «Математический театр» по каждой из 21 тематических линий преимущественно продолжает содержание ознакомительного этапа «Математический театр».

I. АРИФМЕТИКА

1. Суммы

Телескопическое суммирование. Суммы с переменными пределами. Использование формул сокращенного умножения (разность квадратов, кубов), разложения многочленов на множители при вычислении сумм. Последовательности. Числа Фибоначчи как пример рекуррентного соотношения. Свойства чисел Фибоначчи, связанные с суммированием. Примеры задач, при решении которых возникает последовательность Фибоначчи. Применение арифметической, геометрической прогрессий и их свойств при решении задач. Понятие о рекуррентных соотношениях.

2. Числа и их свойства

Определение рационального числа. Доказательство рациональности периодических дробей. Конструкции с рациональными числами. Определение иррационального числа. Доказательство иррациональности чисел на примере числа $\sqrt{2}$. Сопряженные иррациональные числа. Умножение выражения на сопряженное. Рациональность и иррациональность суммы, разности, произведения и частного иррациональных чисел. Иррациональность бесконечных непериодических десятичных дробей.

Приложения иррациональных чисел. Иррациональность в алгебраических задачах. Связь между диагональю и стороной квадрата. Невозможность построения правильного треугольника с вершинами в узлах сетки. Применение идей о рациональности и иррациональности в геометрических задачах.

3. Закономерности

Обобщение числовой задачи на задачу с переменным количеством элементов. Формулы числовых закономерностей. Введение формул закономерностей при подсчете количества объектов в арифметических, геометрических, логических и комбинаторных задачах. Метод математической индукции. Формальное введение метода. База, шаг индукции. Доказательство алгебраических равенств (формул закономерностей) с помощью метода математической индукции. Задачи с шагом, отличным от 1.

Более сложные схемы математической индукции. Индукция со ссылкой на несколько предыдущих элементов. Возвратная схема математической индукции, примеры неправильного применения метода математической индукции. Использование метода математической индукции при решении геометрических, комбинаторных, комбинаторно-геометрических, теоретико-числовых задач.

4. Время и движение

Относительное движение. Переход в систему координат, связанную с одним из объектов, движущимся по прямой или по окружности. Движение мимо протяженных объектов. Движение по реке. Задачи о двигающемся эскалаторе. Задачи на движение с несколькими переменными. Применение неравенства Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух чисел, неравенства Штурма в задачах на движение. Сведение текстовых задач (на движение, совместную работу и т. д.) к линейным и нелинейным системам с несколькими переменными.

II. ГЕОМЕТРИЯ

1. Геометрическое мышление

Задачи на построение. Решение нестандартных задач на построение, нахождение ГМТ. Использование симметрии в задачах на построение. Построение кратчайших путей. Биссектрисы, серединные перпендикуляры как ГМТ.

Решение задач, использующих дополнительные построения: удвоение медианы, откладывание равного отрезка на продолжении стороны («спрямление»), построение середины отрезка, проведение высот, вспомогательной окружности.

Движения плоскости и их использование при решении геометрических задач. Центральная, осевая и скользящая симметрия. Поворот. Параллельный перенос. Гомотетия, поворотная гомотетия.

2. Площади

Формула площади треугольника. Вывод формулы площади произвольного треугольника с вершинами в узлах сетки. Вывод формулы площади произвольного треугольника с помощью метода дополнения. Вычисление площадей фигур с помощью разрезов на элементарные части (прямоугольники и треугольники).

Метод трансформации площадей, основанный на формуле площади треугольника.

Формула Пика для вычисления площадей многоугольников с вершинами в узлах сетки. Ее доказательство методом математической индукции и применение в задачах.

3. Геометрические неравенства

Неравенство треугольника и дополнительные построения. Использование дополнительных построений при доказательстве геометрических неравенств. Задача о нахождении кратчайшего пути между двумя точками, находящимися по одну сторону от заданной прямой, касающегося этой прямой.

Более сложные задачи о кратчайших путях, использующие симметрию и неравенство треугольника.

Неравенство ломаной как обобщение неравенства треугольника. Теорема о монотонности периметра: если внутри одного треугольника находится другой, то периметр внутреннего треугольника меньше периметра внешнего.

Случаи в геометрических задачах. Доказательство правильности дополнительного построения.

4*. Аналитические методы в геометрии

Теорема Пифагора. Доказательства теоремы, основанные на свойствах площадей фигур. Применение теоремы Пифагора при решении задач на разрезание.

Декартовы координаты на плоскости. Метод координат для решения геометрических задач. Векторы, их свойства. Использование векторов в геометрических доказательствах.

Теоремы синусов и косинусов. Их применение в геометрических доказательствах.

III. АЛГЕБРА

1. От чисел к буквам

Алгебраические преобразования. Понятие об одночлене, многочлене. Разложение многочленов на множители. Формулы сокращенного умножения и их применение при решении задач.

Многочлены с целыми коэффициентами, их свойства. Свойства коэффициентов многочлена. Теорема Виета для квадратного трехчлена.

Квадратный трехчлен, его свойства.

Доказательство теоремы Безу для многочленов, ее использование при решении задач. Понятие асимптотики на примере зависимости поведения многочлена от знака его старшего коэффициента. Теорема Виета.

2. Функциональные зависимости

Линейная функция. Свободный член и угловой коэффициент, их геометрический смысл. График линейной функции. Точки с целочисленными координатами на прямой. Использование свойств линейной функции при решении нестандартных задач.

Квадратичная функция. Геометрический смысл коэффициентов. График квадратичной функции. Использование свойств непрерывности графиков функций для решения задач.

Распознавание функций по их свойствам и значениям. Интерполяционные многочлены.

3. Неравенства и оценки

Доказательство неравенств. Неотрицательность квадрата числа. Выделение полных квадратов. Неравенство о средних арифметическом и геометрическом для двух чисел. Неравенство о сумме квадратов трех чисел и их попарных произведениях.

Сведение неравенств к уже известным. Неравенства о средних для двух чисел.

Транснеравенство, неравенство Чебышева. Симметрические и циклические неравенства.

Неравенство Коши — Буняковского — Шварца. Способы его доказательства. Лемма Титу.

Общий случай неравенства о средних. Метод Штурма доказательства неравенств. Доказательство классических неравенств с помощью метода Штурма.

IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Делимость

Алгоритм Евклида. Свойства НОД и НОК. Теорема о линейном представлении НОД, ее использование для нахождения частного решения линейных диофантовых уравнений.

Нелинейные уравнения в целых, неотрицательных, натуральных числах. Использование степеней вхождения простых чисел. Метод бесконечного спуска. Использование сравнений по модулю. Применение разложения на множители, выделения полного квадрата, других ФСУ.

Мультипликативные функции. Функция Эйлера, простейшие примеры вычисления функции. Связь с МТФ. Теорема Эйлера.

2. Остатки

Перебор по остаткам. Остатки квадратов при делении на 3, 4, 5, 7, 8, 9.

Сравнения по модулю. Свойства сравнений. Вопрос о делении сравнений. Сравнения как удобный метод записи перебора по остаткам.

Решение сравнений через сведение к линейным диофантовым уравнениям. Решение линейных диофантовых уравнений.

Малая теорема Ферма. Доказательство через остатки произведений при делении на p . Доказательство по индукции. Теорема Вильсона. Применение МТФ и теоремы Вильсона в задачах теории чисел.

Теория чисел на окружности. Первообразный корень. Порядок (показатель) числа по модулю, его свойства. Классы вычетов. Доказательство МТФ через показатели. Доказательство МТФ через системы вычетов.

V. ЛОГИКА

1. Математическая логика

Приемы решения логических задач на оценку и пример. Доказательства, использующие раскраску объектов и разбиение на группы. Отрицание логического следования.

Использование принципа крайнего при решении логических задач. Логические формулы, их использование для построения отрицаний. Законы де Моргана. Таблицы истинности.

Графы в логических задачах. Примеры комбинированных логических задач, связанных с другими областями математики.

2. Принципы решения задач

Принцип узких мест как инструмент конструирования примеров, доказательства утверждений (в том числе в комбинации с другими методами, такими как метод «от противного»). Рассмотрение наибольшего или наименьшего числа в ряду, упорядочивание. Геометрический принцип крайнего.

Процессы. Инвариант как метод доказательства утверждений, выяснения результата процесса. Инварианты, связанные с теорией чисел (делимость, остатки). Инварианты в геометрических задачах. Раскраска как инвариант.

Полуинвариант, сравнение с инвариантом. Нахождение полуинварианта как метод доказательства конечности процесса. Сумма и произведение чисел как полуинвариант. Полуинварианты в комбинаторной геометрии, теории графов, геометрических задачах.

3. Алгоритмы и конструкции

Понятие о «жадном» алгоритме. «Жадный» алгоритм как метод построения примера, доказательства минимальности или максимальности. Использование «жадного» алгоритма при постепенном конструировании. Отклонение от «жадности».

Составление алгоритмов, работающих вне зависимости от промежуточных результатов работы алгоритма. Связь с системами счисления. Примеры таких алгоритмов в задачах на взвешивания, угадывание, в задачах на клетчатых досках.

Обобщение методов доказательства невозможности построения алгоритма при определенных условиях. Оценка сложности алгоритмов.

4. Игры и стратегии

Стратегия предварительного разбиения ходов на пары в математических играх для двух игроков, связь с темой «Соответствия». Разбиение на пары во время игры. Стратегии создания «заповедников».

Неконструктивное доказательство существования стратегии.

Игры на графах. Использование двоичной системы счисления в теории игр. Игра Ним.

VI. КОМБИНАТОРИКА

1. Комбинаторика

Размещения с повторениями и их использование при решении задач. Размещения без повторений. Вывод формулы и ее запись в виде отношения факториалов.

Число сочетаний и его связь с числом размещений. Вывод формулы. Комбинаторное и алгебраическое доказательства равенств для числа сочетаний.

Свойства чисел сочетаний. Вывод формулы шаров и перегородок. Взаимно однозначные соответствия в комбинаторике. Идея кодирования задач. Комбинаторные задачи с множествами.

Бином Ньютона, треугольник Паскаля, связь между ними. Их применение при решении задач.

2. Теория множеств

Формула включений-исключений для трех множеств.

Обобщение формулы включений-исключений на несколько множеств. Комбинаторное доказательство. Применение формулы включений-исключений при решении задач комбинаторной геометрии.

Индукционное доказательство формулы включений-исключений. Использование изоморфизма множеств для упрощения подсчета числа вариантов.

VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Раскраски и разбиения

Разбиение на группы объектов двух типов, расположенных по кругу. Разбиение досок на части для доказательства оценок. Подсчет общего количества разбиений.

Определение правильных вершинной и реберной раскрасок. Двудольный граф как пример графа, раскрашиваемого в два цвета.

Хроматическое число графа. Планарные (плоские) графы, их связь с картами. Проблема четырех красок. Формула Эйлера для связного плоского графа.

2. Теория графов

Связность графа, компоненты связности. Циклы в графах. Дерево, его определения и свойства. Зависимость минимального количества ребер в графе от числа компонент связности.

Двудольные графы. Критерий двудольности.

Выделение остовного дерева. Подвешивание графа. Дополнительный граф. Использование графов в теории чисел, комбинаторной геометрии.

Ориентированные графы, их свойства и область применения.

Критерий существования эйлера пути, эйлера цикла в графе. Разбиение произвольного графа в объединение простых путей и непересекающихся циклов. Гамильтонов путь, гамильтонов цикл в графе. Существование гамильтонова пути в полном ориентированном графе. Примеры графов без гамильтоновых циклов.

3. Комбинаторная геометрия

Раскраски плоскости с определенными свойствами. Задачи о нахождении одноцветных и разноцветных точек на определенном расстоянии. Раскраски паркетов. Раскраска объемных фигур.

Определение выпуклого множества. Различные определения выпуклых многоугольников, их эквивалентность. Понятие о триангуляции. Лемма о диагонали. Триангуляция произвольного многоугольника. Доказательство формул суммы градусных мер внутренних и внешних углов многоугольника. Связь триангуляций с деревьями. Лемма о наличии в триангуляции двух треугольников с двумя сторонами, совпадающими со сторонами многоугольника.

Опорная прямая многоугольника. Выпуклая оболочка системы точек. Построение выпуклой оболочки. Использование при решении задач и доказательстве утверждений.

РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ КУРСА

В ходе изучения данного курса вносится существенный вклад в развитие **личностных результатов:**

- формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности, обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию;
- формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со взрослыми и сверстниками в процессе образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видов деятельности.

Формируются и получают развитие следующие **метапредметные результаты:**

Регулятивные универсальные учебные действия:

Обучающийся научится:

- целеполаганию, включая постановку новых целей, преобразование практической задачи в познавательную;
- самостоятельно анализировать условия достижения цели на основе учета выделенных учителем ориентиров действия в новом материале;

- планированию путей достижения целей;
- умению самостоятельно контролировать своё время и управлять им;
- адекватно самостоятельно оценивать правильность выполнения действия и вносить необходимые коррективы в исполнение, как в конце действия, так и по ходу его реализации.

Коммуникативные универсальные учебные действия:

Обучающийся научится:

- учитывать разные мнения и стремиться к координации различных позиций в сотрудничестве;
- формулировать собственное мнение и позицию, аргументировать и координировать её с позициями партнеров в сотрудничестве при выработке общего решения в совместной деятельности;
- устанавливать и сравнивать разные точки зрения, прежде чем принимать решения и делать выбор;
- задавать вопросы, необходимые для организации собственной деятельности и сотрудничества с партнером;
- осуществлять взаимный контроль и оказывать в сотрудничестве необходимую взаимопомощь.

Познавательные универсальные учебные действия:

Обучающийся научится:

- осуществлять поиск необходимой информации для выполнения учебных заданий с использованием учебной литературы;
- создавать и преобразовывать модели и схемы для решения задач;
- осуществлять выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий;
- устанавливать причинно-следственные связи;
- осуществлять анализ, сравнение, сериацию и классификацию, самостоятельно выбирая основания и критерии для указанных логических операций;
- строить логическое рассуждение, включающее установление причинно-следственных связей;

Формируются и получают развитие следующие **воспитательные результаты**:

Обучающийся приобретает знания:

- о принятых в обществе нормах поведения и общения;
- об интеллектуальной деятельности, о способах и средствах выполнения заданий;
- о правилах конструктивной групповой работы;
- формирование мотивации к учению через решение олимпиадных задач.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

«Математический театр»

5 класс (34 часа)

№ п.п.	Наименование раздела, темы	Кол-во часов
1	Математическое фойе - Знакомство с технологией «Математический театр». Умный счет.	1
2	Выход на бис по теме «Умный счет»	1
3	Разрезание фигур	1
4	Выход на бис по теме «Разрезание фигур»	1
5	Круглые задачи	1
6	Выход на бис по теме «Круглые задачи»	1
7	Элементарно!	1
8	Выход на бис по теме «Элементарно!»	1
9	Точки и кусочки	1
10	Выход на бис по теме «Точки и кусочки»	1
11	Переливания	1
12	Выход на бис по теме «Переливания»	1
13	Маршруты	1
14	Выход на бис по теме «Маршруты»	1
15	Числовые ребусы	1
16	Выход на бис по теме «Числовые ребусы»	1
17	Уравнивание	1
18	Выход на бис по теме «Уравнивание»	1
19	Четность	1
20	Выход на бис по теме «Четность»	1
21	Правда или ложь?	1
22	Выход на бис по теме «Правда или ложь?»	1
23	Игры на досках	1
24	Выход на бис по теме «Игры на досках»	1
25	Последняя цифра	1
26	Выход на бис по теме «Последняя цифра»	1
27	Раскраски досок	1
28	Выход на бис по теме «Раскраски досок»	1
29	Рукопожатия	1
30	Выход на бис по теме «Рукопожатия»	1
31	Числовые лесенки	1
32	Выход на бис по теме «Числовые лесенки»	1
33	Прямые и ломанные	1
34	Выход на бис по теме «Прямые и ломанные». Подведение итогов театрального сезона	1

6 класс (34 часа)

№ п.п.	Наименование раздела, темы	Кол-во часов
1	Открытие театрального сезона. Повторение.	
2	Магический квадрат	1
3	Выход на бис по теме «Магический квадрат»	1
4	Остров рыцарей и лжецов	1
5	Выход на бис по теме «Остров рыцарей и лжецов»	1

6	Переправы	1
7	Выход на бис по теме «Переправы»	1
8	Метод перебора	1
9	Выход на бис по теме «Метод перебора»	1
10	Игра «Математическая абака»	1
11	Буквенные ребусы	1
12	Выход на бис по теме «Буквенные ребусы»	1
13	Дни недели	1
14	Выход на бис по теме «Дни недели»	1
15	Эффект «плюс-минус один»	1
16	Выход на бис по теме «Эффект «плюс-минус один»»	1
17	Площадь на клетчатой бумаге	1
18	Выход на бис по теме «Площадь на клетчатой бумаге»	1
19	Игра «Плюс 5 минус 2»	1
20	Малые случаи	1
21	Выход на бис по теме «Малые случаи»	1
22	Разрезания по диагоналям клетки	1
23	Выход на бис по теме «Разрезания по диагоналям клетки»	1
24	Четность суммы чисел	1
25	Выход на бис по теме «Четность суммы чисел»	1
26	Чередование	1
27	Выход на бис по теме «Чередование»	1
28	Игра «Побег»	1
29	По прямой – кратчайший путь	1
30	Выход на бис по теме «По прямой – кратчайший путь»	1
31	Учти лишнее	1
32	Выход на бис по теме «Учти лишнее»	1
33	Шахматная доска	1
34	Выход на бис по теме «Шахматная доска». Подведение итогов театрального сезона	1

7 класс (34 часа)

№ п.п.	Наименование раздела, темы	Кол-во часов
1	Открытие театрального сезона. Повторение.	1
2	Изобрази множество	1
3	Выход на бис по теме «Изобрази множество»	1
4	Игра «Бонусы»	1
5	Подведение итогов театрального сезона	1
6	Остатки на числовом луче	1
7	Выход на бис по теме «Остатки на числовом луче»	1
8	Одним росчерком	1
9	Выход на бис по теме «Одним росчерком»	1
10	Строй стратегию!	1
11	Выход на бис по теме «Строй стратегию!»	1
12	Задачи на движение	1
13	Выход на бис по теме «Задачи на движение»	1
14	Объемные фигуры	1
15	Выход на бис по теме «Объемные фигуры»	1

16	Игра «Математическая карусель»	1
17	Дерево возможностей	1
18	Выход на бис по теме «Дерево возможностей»	1
19	Что в сундуке?	1
20	Выход на бис по теме «Что в сундуке?»	1
21	Разрезания в пространстве	1
22	Выход на бис по теме «Разрезания в пространстве»	1
23	Расположение фигур	1
24	Выход на бис по теме «Расположение фигур»	1
25	Игра «Карта сокровищ»	1
26	Можно или нельзя?	1
27	Выход на бис по теме «Можно или нельзя?»	1
28	Анализ с конца	1
29	Выход на бис по теме «Анализ с конца»	1
30	Пентамино	1
31	Выход на бис по теме «Пентамино»	1
32	Логичный перебор	1
33	Выход на бис по теме «Логичный перебор»	1
34	Игра «Поверь в себя». Подведение итогов театрального сезона	1

8 класс (34 часа)

№ п.п.	Наименование раздела, темы	Кол-во часов
1	Открытие театрального сезона. Повторение.	1
2	Переверни и сложи	1
3	Выход на бис по теме «Переверни и сложи»	1
4	Паркеты	1
5	Выход на бис по теме «Паркеты»	1
6	Угадай, что я задумал	1
7	Выход на бис по теме «Угадай, что я задумал»	1
8	От чисел – к буквам	1
9	Выход на бис по теме «От чисел – к буквам»	1
10	Игра «Крестики-Нолики»	1
11	Делимость и признаки	1
12	Выход на бис по теме «Делимость и признаки»	1
13	Загадка Шахерезады	1
14	Выход на бис по теме «Загадка Шахерезады»	1
15	Необычные площади	1
16	Выход на бис по теме «Необычные площади»	1
17	Отрезки на прямой	1
18	Выход на бис по теме «Отрезки на прямой»	1
19	Игра «Карта сокровищ»	1
20	Разрежь и составь	1
21	Выход на бис по теме «Разрежь и составь»	1
22	Схема помогает!	1
23	Выход на бис по теме «Схема помогает!»	1
24	Сколько нужно взять?	1
25	Выход на бис по теме «Сколько нужно взять?»	1
26	Дополнение множества	1

27	Выход на бис по теме «Дополнение множества»	1
28	Игра «Математическая абака»	1
29	Конструкции с дробями	1
30	Выход на бис по теме «Конструкции с дробями»	1
31	Оценки сверху и снизу	1
32	Выход на бис по теме «Оценки сверху и снизу»	1
33	Остатки сладки	1
34	Выход на бис по теме «Остатки сладки». Подведение итогов театрального сезона	1

9 класс (17 часов)

№ п.п.	Наименование раздела, темы	Кол-во часов
1	Открытие театрального сезона. Повторение.	1
2	Шахматная раскраска	1
3	Выход на бис по теме «Шахматная раскраска»	1
4	Игра «Математическая карусель»	1
5	Семь раз отмерь	1
6	Выход на бис по теме «Семь раз отмерь»	1
7	Комбинаторика	1
8	Выход на бис по теме «Комбинаторика»	1
9	Вокруг куба	1
10	Выход на бис по теме «Вокруг куба»	1
11	Разбиение на пары	1
12	Выход на бис по теме «Разбиение на пары»	1
13	Симметричная стратегия	1
14	Выход на бис по теме «Симметричная стратегия»	1
15	Что такое граф?	1
16	Выход на бис по теме «Что такое граф?»	1
17	Подведение итогов театрального сезона	1